

Geometría Analítica en el Plano (\mathbb{R}^2)

Combinaciones lineales, ecuaciones de la recta, paralelismo, perpendicularidad y propiedades métricas

Preparado especialmente para:

Estudiante de Bachillerato

Idea visual clave / Intuición

Idea central de esta compilación:

La geometría analítica conecta de forma perfecta el álgebra de los vectores con la intuición espacial del plano. Representar y manipular rectas mediante vectores directores y normales, y calcular intersecciones, distancias y ángulos, nos permite resolver problemas geométricos complejos con total rigurosidad matemática y claridad visual.

Índice

1. Vectores en el Plano y Combinaciones Lineales	3
1.1. Resolución de Ejercicios del Tema	3
2. Ecuaciones de la Recta en el Plano	7
2.1. Posiciones Relativas de Rectas	8
3. Aplicaciones Métricas y Geométricas	9
3.1. Punto Medio de un Segmento	9
3.2. Norma, Producto Escalar y Ángulo entre Vectores	11
4. Resumen Conceptual y Fórmulas Clave	16

1. Vectores en el Plano y Combinaciones Lineales

Un vector en \mathbb{R}^2 es un objeto geométrico dotado de magnitud, dirección y sentido, representado algebraicamente por un par ordenado de coordenadas reales.

Combinación Lineal de Vectores

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ vectores en un espacio vectorial V , y sean c_1, c_2, \dots, c_k escalares reales. Se dice que un vector $\vec{w} \in V$ es una **combinación lineal** de los vectores dados si se puede escribir de la forma:

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k$$

Geoméricamente en \mathbb{R}^2 , la combinación lineal de dos vectores no paralelos \vec{u} y \vec{v} mediante $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ representa un punto en el plano obtenido al estirar u orientar los vectores originales y sumarlos siguiendo la **regla del paralelogramo**.

Concepto: Combinación Lineal de Vectores

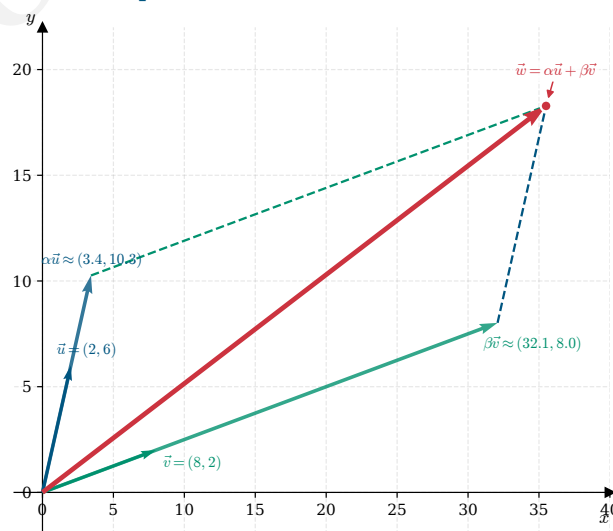


Figura 1: Regla del paralelogramo para la combinación lineal $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ con $\vec{u} = (2, 6)^T$, $\vec{v} = (8, 2)^T$, $\alpha = 1.71$ y $\beta = 4.01$.

1.1. Resolución de Ejercicios del Tema

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1. Dados los vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Calcular los escalares $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Solución paso a paso:

1. **Planteamiento de la ecuación vectorial:**

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} &= m \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3m \\ -2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n \\ 2n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3m - n \\ -2m + 2n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. **Formulación del Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL):** Igualando componente a componente, obtenemos:

$$\begin{cases} 3m - n = 0 & \text{(Ecuación 1)} \\ -2m + 2n = -5 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

3. **Resolución del sistema por el método de sustitución:** De la Ecuación 1, despejamos la variable n :

$$n = 3m$$

Sustituimos esta expresión en la Ecuación 2:

$$\begin{aligned}-2m + 2(3m) &= -5 \\ -2m + 6m &= -5 \\ 4m &= -5 \implies m = -\frac{5}{4} = -1.25\end{aligned}$$

Conociendo el valor de m , calculamos n :

$$n = 3 \left(-\frac{5}{4} \right) = -\frac{15}{4} = -3.75$$

4. **Conclusión:** Los escalares buscados son $m = -\frac{5}{4}$ y $n = -\frac{15}{4}$. Por lo tanto:

$$\vec{c} = -\frac{5}{4}\vec{a} - \frac{15}{4}\vec{b}$$

Comprobación numérica:

$$\begin{aligned}-1.25 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 3.75 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3.75 \\ 2.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.75 \\ -7.5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

El resultado coincide perfectamente.

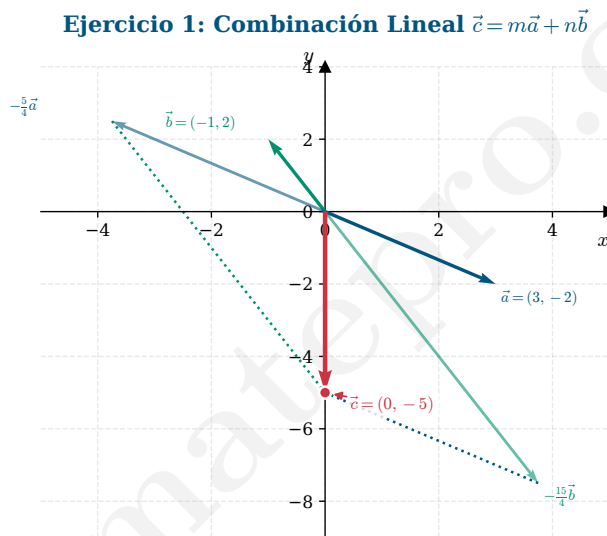


Figura 2: Consecuencia geométrica del Ejercicio 1. Se estiran y reflejan los vectores \vec{a} y \vec{b} con escalares negativos $m = -1.25$ y $n = -3.75$, resultando exactamente en el vector $\vec{c} = (0, -5)^T$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2. Expresar el vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Solución paso a paso:

1. **Planteamiento de la ecuación:** Buscamos escalares $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m + 4n \\ -2m - \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

2. **Planteamiento del SEL:**

$$\begin{cases} 3m + 4n = 1 & \text{(Ecuación 1)} \\ -2m - \frac{n}{2} = 5 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

3. **Resolución del sistema por el método de igualación:** Primero, multiplicamos la Ecuación 2 por 2 para eliminar el denominador:

$$-4m - n = 10 \implies n = -4m - 10 \quad \text{(Ecuación 2')}$$

De la Ecuación 1 despejamos también la variable n :

$$4n = 1 - 3m \implies n = \frac{1 - 3m}{4} \quad \text{(Ecuación 1')}$$

Igualando ambas expresiones de n :

$$-4m - 10 = \frac{1 - 3m}{4}$$

Multiplicamos toda la ecuación por 4:

$$\begin{aligned} 4(-4m - 10) &= 1 - 3m \\ -16m - 40 &= 1 - 3m \end{aligned}$$

Agrupamos los términos con m en el miembro izquierdo y las constantes en el derecho:

$$\begin{aligned} -16m + 3m &= 1 + 40 \\ -13m &= 41 \implies m = -\frac{41}{13} \end{aligned}$$

Ahora sustituimos m en la Ecuación 2' para hallar n :

$$\begin{aligned} n &= -4\left(-\frac{41}{13}\right) - 10 \\ &= \frac{164}{13} - \frac{130}{13} = \frac{34}{13} \end{aligned}$$

4. **Conclusión:** El vector \vec{a} se puede expresar como combinación lineal como:

$$\vec{a} = -\frac{41}{13}\vec{b} + \frac{34}{13}\vec{c}$$

Ejercicio 2: Combinación Lineal $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$

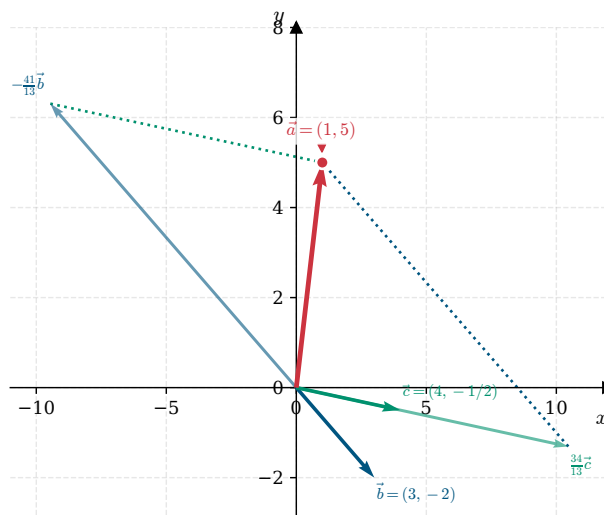


Figura 3: Consecuencia geométrica del Ejercicio 2. El vector \vec{b} se escala en sentido opuesto ($m \approx -3.15$) y \vec{c} en sentido directo ($n \approx 2.62$). La suma de ambos genera el vector $\vec{a} = (1, 5)^T$.

2. Ecuaciones de la Recta en el Plano

Una recta en el plano queda unívocamente determinada por un punto a través del cual pasa y un vector que indica su dirección (vector director), o alternativamente por un punto y un vector perpendicular a ella (vector normal).

Formas de la Ecuación de la Recta

Dada una recta que contiene al punto $P_0(x_0, y_0)$ con vector director $\vec{v} = (v_x, v_y)^T$:

1. Ecuación Vectorial:

$$\vec{r}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{v} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Ecuaciones Paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \end{cases}$$

3. Ecuación General o Implícita: Se obtiene al eliminar el parámetro t . Tiene la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde el vector $\vec{n} = (A, B)^T$ representa un **vector normal** (perpendicular) a la recta. Se cumple que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, lo que algebraicamente significa:

$$Av_x + Bv_y = 0$$

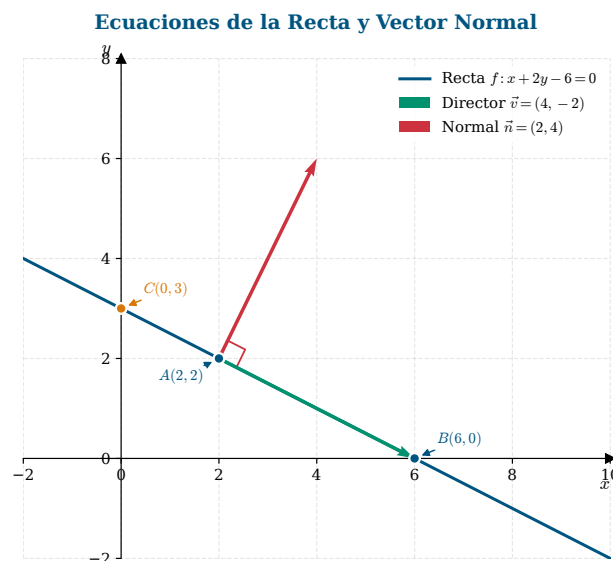


Figura 4: Recta f determinada por los puntos $A(2, 2)$ y $B(6, 0)$. Se muestra su vector director $\vec{v} = (4, -2)^T$ y su vector normal $\vec{n} = (2, 4)^T$ perpendicular a la recta en A .

2.1. Posiciones Relativas de Rectas

Sean dos rectas r y s con vectores directores \vec{v}_r y \vec{v}_s y vectores normales \vec{n}_r y \vec{n}_s , respectivamente:

- ****Rectas Paralelas****: Son aquellas que tienen la misma dirección. Sus vectores directores son proporcionales:

$$\vec{v}_r = k\vec{v}_s \quad (\text{para algún } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Si además comparten al menos un punto, se denominan ****rectas coincidentes****.

- ****Rectas Perpendiculares****: Son aquellas que se cortan formando un ángulo recto (90°). Sus vectores directores son ortogonales:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \implies v_{rx}v_{sx} + v_{ry}v_{sy} = 0$$

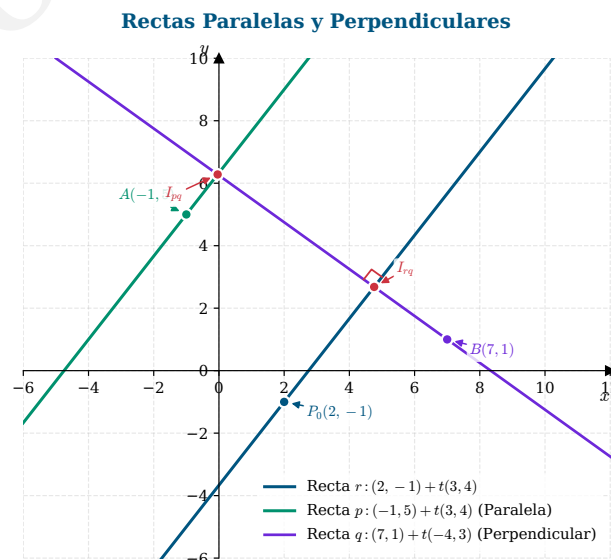


Figura 5: Estudio de paralelismo y perpendicularidad en el plano. La recta p es estrictamente paralela a r , mientras que la recta q es perpendicular a ambas, cortándolas en los puntos de intersección indicados.

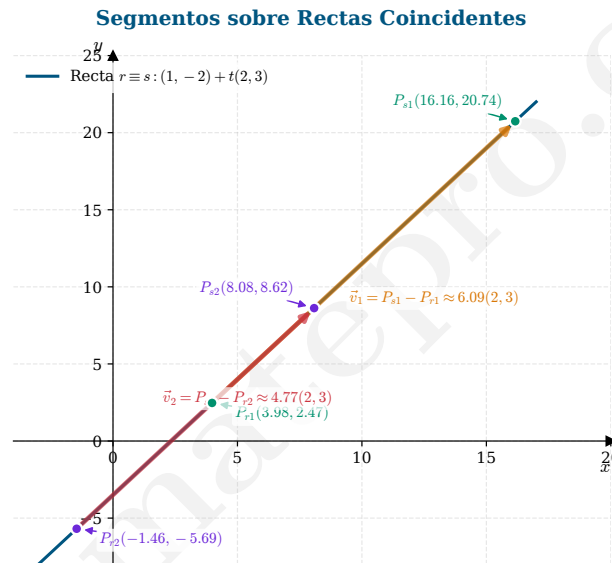


Figura 6: Vectores de desplazamiento \vec{v}_1 y \vec{v}_2 trazados entre puntos pertenecientes a una misma familia de rectas paralelas coincidentes. Nótese que los vectores son proporcionales al vector director $\vec{v} = (2, 3)^T$.

3. Aplicaciones Métricas y Geométricas

En esta sección estudiaremos problemas sobre puntos medios, cálculo de vértices en figuras geométricas (paralelogramos), así como propiedades métricas vectoriales: normas, productos escalares y el ángulo formado por dos vectores.

3.1. Punto Medio de un Segmento

El punto medio representa el centro geométrico de un segmento que conecta dos puntos extremos.

Fórmula del Punto Medio

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano \mathbb{R}^2 , las coordenadas del punto medio $M(x_M, y_M)$ que los conecta vienen dadas por la media aritmética de sus componentes:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

En un cuadrilátero, si las dos diagonales tienen exactamente el mismo punto medio, la figura es geoméricamente un **paralelogramo**.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 7. Sabiendo que los segmentos AC y BD tienen el mismo punto medio, encuentra las coordenadas del punto D , sabiendo que:

$$A(-2, 3), \quad B(-3, -1), \quad C(4, -2), \quad D(x, y)$$

Solución paso a paso:

1. **Cálculo del punto medio del segmento AC (M_{AC}):** Aplicamos la fórmula con las coordenadas de A y C :

$$\begin{aligned} M_{AC} &= \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + (-2)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2} \right) = (1, 0.5) \end{aligned}$$

2. **Planteamiento del punto medio del segmento BD (M_{BD}):** Usamos las coordenadas de $B(-3, -1)$ y el punto desconocido $D(x, y)$:

$$M_{BD} = \left(\frac{-3 + x}{2}, \frac{-1 + y}{2} \right)$$

3. **Igualación de los puntos medios ($M_{BD} = M_{AC}$):** Dado que los segmentos comparten el mismo punto medio, igualamos sus coordenadas:

$$\left(\frac{-3 + x}{2}, \frac{-1 + y}{2} \right) = (1, 0.5)$$

Esto nos genera dos ecuaciones independientes, una para cada componente espacial:

* **Para la componente x :**

$$\begin{aligned} \frac{-3 + x}{2} &= 1 \\ -3 + x &= 2 \implies x = 5 \end{aligned}$$

* **Para la componente y :**

$$\begin{aligned} \frac{-1 + y}{2} &= 0.5 \\ -1 + y &= 1 \implies y = 2 \end{aligned}$$

4. **Conclusión:** Las coordenadas del punto D son $D(5, 2)$.

¡Cuidado!

En las notas manuscritas del boletín original se observaba un error tipográfico en el que se escribió que el punto medio era $(1, 1.5)$ debido a una confusión en la

componente vertical:

$$\frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (\text{y no } 1.5)$$

Afortunadamente, al plantear la ecuación para la componente y , se utilizó correctamente la igualdad con $1/2$ (o 0.5), lo que permitió obtener el valor final exacto de $y = 2$ para el punto D . Siempre verifica cuidadosamente el signo y la división de los numeradores en el cálculo del punto medio.

Ejercicio 7: Propiedad del Punto Medio

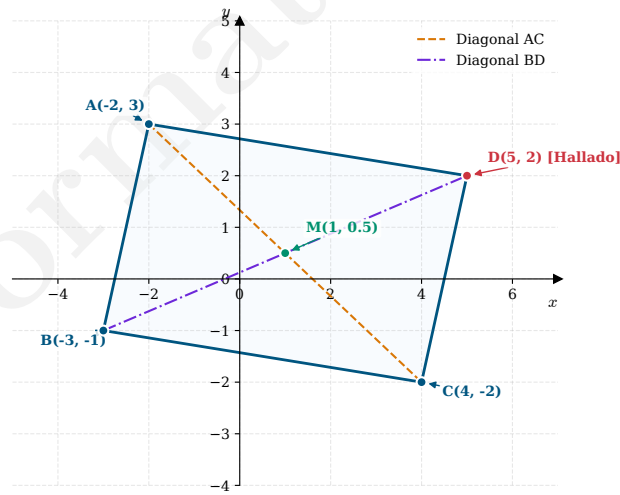


Figura 7: Paralelogramo $ABCD$ obtenido en el Ejercicio 7. Sus diagonales AC (naranja) y BD (morada) se cruzan exactamente en su punto medio común $M(1, 0.5)$.

3.2. Norma, Producto Escalar y Ángulo entre Vectores

Propiedades Métricas de Vectores

Dados los vectores $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)^T$:

1. **Norma o Magnitud** ($\|\vec{u}\|$): Representa la longitud geométrica del vector, calculada usando el Teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

2. **Producto Escalar** ($\vec{u} \cdot \vec{v}$): Es una operación que devuelve un número real, definida por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

3. **Ángulo entre vectores** (θ): El coseno del ángulo formado por dos vectores se relaciona con su producto escalar y sus normas mediante la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \implies \theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 8. Dados los vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular los siguientes valores métricos:

Inciso a) Normas de los vectores:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \approx 5.39$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.07$$

Ejercicio 8(a): Interpretación Geométrica de la Norma

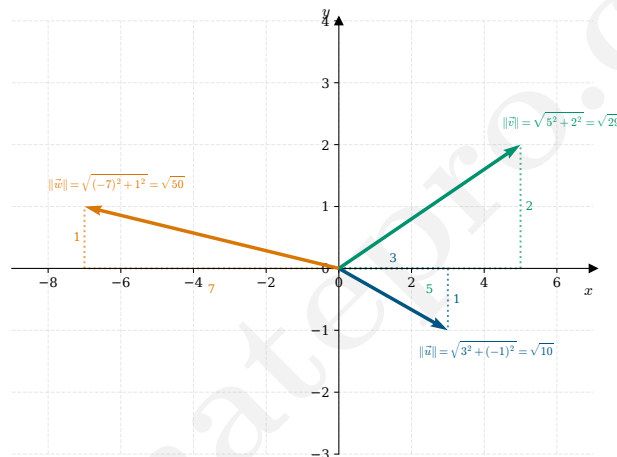


Figura 8: Interpretación geométrica de la norma en el Ejercicio 8(a). La longitud de cada vector corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por sus componentes horizontal y vertical.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 8 (Continuación). Productos escalares y ángulo:

Inciso b) Producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(5) + (-1)(2) = 15 - 2 = 13$$

Inciso e) Ángulo θ entre los vectores \vec{u} y \vec{v} : Aplicamos la fórmula del coseno del ángulo:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{13}{\sqrt{10}\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{290}} \approx 0.7634 \\ \theta &= \arccos(0.7634) \approx 40.24^\circ \end{aligned}$$

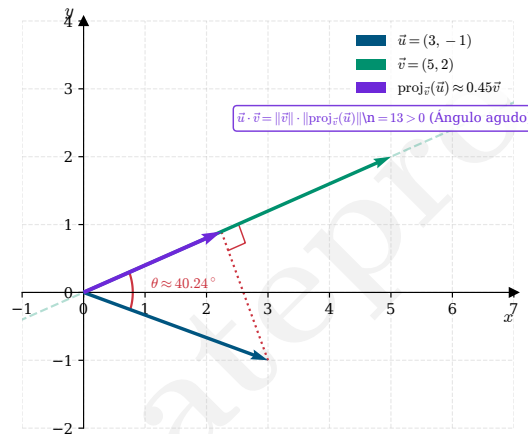
Ejercicio 8(b, e): Proyección y Producto Escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 

Figura 9: Producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y ángulo θ (Ejercicio 8b, e). Al ser el ángulo agudo ($\theta \approx 40.24^\circ$), el vector proyección $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$ tiene el mismo sentido que \vec{v} , resultando en un producto escalar positivo de 13.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 8 (Continuación). Productos escalares restantes:
Inciso c) Producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3(-7) + (-1)(1) = -21 - 1 = -22$$

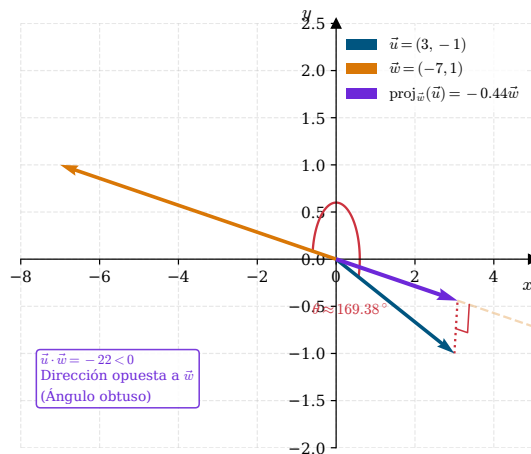
Ejercicio 8(c): Proyección y Producto Escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$ 

Figura 10: Producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$ (Ejercicio 8c). Como el ángulo formado es obtuso ($\theta \approx 169.38^\circ$), la proyección de \vec{u} cae en la dirección opuesta a \vec{w} , lo que genera geoméricamente un producto escalar negativo de -22 .

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 8 (Continuación). Producto escalar final:
Inciso d) Producto escalar $\vec{w} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = -7(5) + 1(2) = -35 + 2 = -33$$

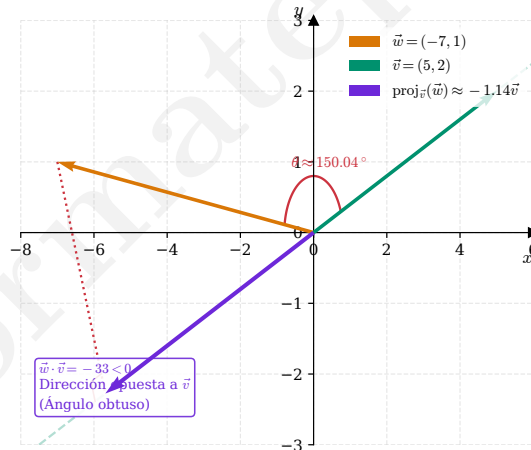
Ejercicio 8(d): Proyección y Producto Escalar $\vec{w} \cdot \vec{v}$ 

Figura 11: Producto escalar $\vec{w} \cdot \vec{v}$ (Ejercicio 8d). Nuevamente, debido al ángulo obtuso ($\theta \approx 150.04^\circ$), la proyección se orienta en sentido contrario al de \vec{v} , lo que resulta en un producto escalar negativo de -33 .

4. Resumen Conceptual y Fórmulas Clave

Conclusión fundamental

Para asegurar el éxito en las evaluaciones de geometría analítica en el plano, ten siempre presente este mapa mental de fórmulas:

Concepto Geométrico	Expresión Matemática / Fórmula
Combinación Lineal en \mathbb{R}^2	$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \iff \begin{cases} c_x = ma_x + nb_x \\ c_y = ma_y + nb_y \end{cases}$
Ecuación Vectorial de la Recta	$\vec{r}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{v}$
Vector Normal a la Recta	$\vec{n} = (A, B)^T$ perpendicular a $\vec{v} = (B, -A)^T$
Condición de Rectas Paralelas	$\vec{v}_r = k\vec{v}_s \iff A_r B_s - A_s B_r = 0$
Condición de Perpendicularidad	$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \iff v_{rx}v_{sx} + v_{ry}v_{sy} = 0$
Punto Medio de un Segmento	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$
Norma de un Vector (Magnitud)	$\ \vec{u}\ = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
Ángulo θ entre dos Vectores	$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$

Tabla 1: Tabla resumen de conceptos y herramientas clave de geometría analítica.